Matemáticas 1 - Preparaduría 10.

Ejercicios - SEMANA 11.

1. Demuestre que si f es la función cuadrática definida por $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, con $\alpha \neq 0$, el número c del Teorema del Valor Medio siempre es el punto medio del intervalo dado $\left[a, b\right]$.

2. Demostrar que
$$\left| \operatorname{sen} \sqrt{x+1} + \operatorname{sen} \sqrt{x} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
(Sugerencia: Usar el Teorema del valor medio)

3. Calcular, si es que existe, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{\cos\left(2x\right)} - \sqrt{\cos\left(3x\right)}}{x^2} \right)^n$, donde n es un entero positivo.

4. Calcular, si es que existe, $\displaystyle\lim_{x \to a} \left(\tan x - \tan a\right) \cot\left(x - a\right)$

   (a) Sin aplicar la Regla de L'Höpital.

   (b) Aplicando, si es posible, la Regla de L'Höpital.

5. Calcular, si es que existe, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x - \operatorname{sen} x}{x\left(1 - \cos x\right)}$.

6. Un triángulo rectángulo está formado por los segmentos positivos de los ejes coordenados y una recta que pasa por el punto $\left(2, 3\right)$. Hallar los vértices de modo que su área sea mínima.

7. Se va a cortar una viga rectangular de un tronco de sección transversal circular. Si la resistencia de una viga es proporcional al ancho y al cuadrado de su altura. Encontrar las dimensiones de la sección transversal que da la viga de mayor resistencia.

8. Encontrar el trapecio de máxima área inscrito en un semicírculo de radio 10 cm.

9. Graficar la función h definida por
$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \leq -2 \\ \dfrac{\left(x+1\right)^2}{x^2+1} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$
sabiendo que g es una función que cumple

   - $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} g(x) = 2$, $\displaystyle\lim_{x \to -4} g(x) = 4$, tiene asíntota vertical en $x = -2$
   - $g'(x) > 0$ en $\left(-\infty, -4\right)$, $g''(x) < 0$ en $\left(-4, -2\right)$.
   - Valores extremos en los puntos $\left(-4, -1\right)$, $\left(-3, 1\right)$ y $\left(-2, 1\right)$.

10. Graficar las siguientes funciones, haciendo el análisis correspondiente

    1. $f(x) = \left| \dfrac{\left(x-3\right)^2}{\left(x-4\right)^2+1} - \dfrac{1}{2} \right|$

    2. $f(x) = \dfrac{\left|x^2-3x+2\right| + \left|x^2-1\right|}{\left|x\right|}$

11. La siguiente gráfica corresponde a la derivada de una cierta función f: **a.** Halle los extremos relativos de dicha función; **b.** Trace una gráfica aproximada de f